Epreuve

Mathématiques

Durée : 3H

Devoir de Synthèse n°2

Classe : $4^{ème}$ ScExp

Mars 2014

Professeur

Dhaouadi Nejib

Exercice 1

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

⊙ *La courbe* $\mathscr{C}$ *(Voir page 3) représente une fonction* f *définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$.

⊙ *La courbe* $\mathscr{C}$ *coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse* $-\sqrt[3]{7}$.

⊙ *Les droites* $T1, T2, T3$ *et* $T4$ *sont les tangentes à la courbe* $\mathscr{C}$ *aux points d'abscisses respectives* -3, 0, 1 *et* 2.

⊙ *La droite* $D : y = \frac{1}{2}x$ *est une asymptote à la courbe* $\mathscr{C}$ *aux voisinages de* $-\infty$ *et* $+\infty$

	a	b	c
1)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
2)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$
3)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} 2f(x) - x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$
4)	$f'(-3) = -1,75$	$f'(-3) = 0,75$	$f'(-3) = -1$
5)	$f'(1) = -1,25$	$f'(1) = 1,25$	$f'(1) = 2$
6)	$f'(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in [0,2]$	$f'(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in [0,+\infty[$	$f'(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0]$
7)	$f(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \in [0,+\infty]$	$f(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt[3]{7},+\infty\right]$	$f(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\infty,-\sqrt[3]{7}\right]$
8)	*La courbe* $\mathscr{C}$ *admet un seul point d'inflexion*	*La courbe* $\mathscr{C}$ *admet deux points d'inflexion*	*La courbe* $\mathscr{C}$ *admet trois points d'inflexion*

Exercice 2

Soit la fonction f *définie sur* $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ *par :* $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) *Montrer que* f *est dérivable sur* $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ *et que :*

$$\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\ , \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

b) *Etudier la dérivabilité de* f *à droite en 1 et interpreter graphiquement le résultat trouvé.*

c) Drésser le tableau de variations de f sur $[1,+\infty[$.

2) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) Vérifier que f est une fonction paire.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1,+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera le domaine de définition D.

b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de g^{-1} dans le même repère que $\mathscr{C}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]-2,2[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Soit F la primitive de f sur $]-2,2[$ qui s'annule en 0.

1) Soit G la fonction définie sur $]-2,2[$ par : $G(x) = F(-x) + F(x)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $]-2,2[$ et pour tout $x \in]-2,2[$, $G'(x) = 0$.

b) En déduire que F est une fonction impaire.

2) Soit H la fonction définie sur $]0,\pi[$ par : $H(x) = F(2\cos x)$.

a) Montrer que H est dérivable sur $]0,\pi[$ et $\forall x \in]0,\pi[$, $H'(x) = -1$.

b) Expliciter alors $H(x)$ pour tout $x \in]0,\pi[$.

Exercice 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé.
On considère les points $A(1,0,2)$, $B(0,1,2)$ et $C(1,-2,0)$

1) a) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

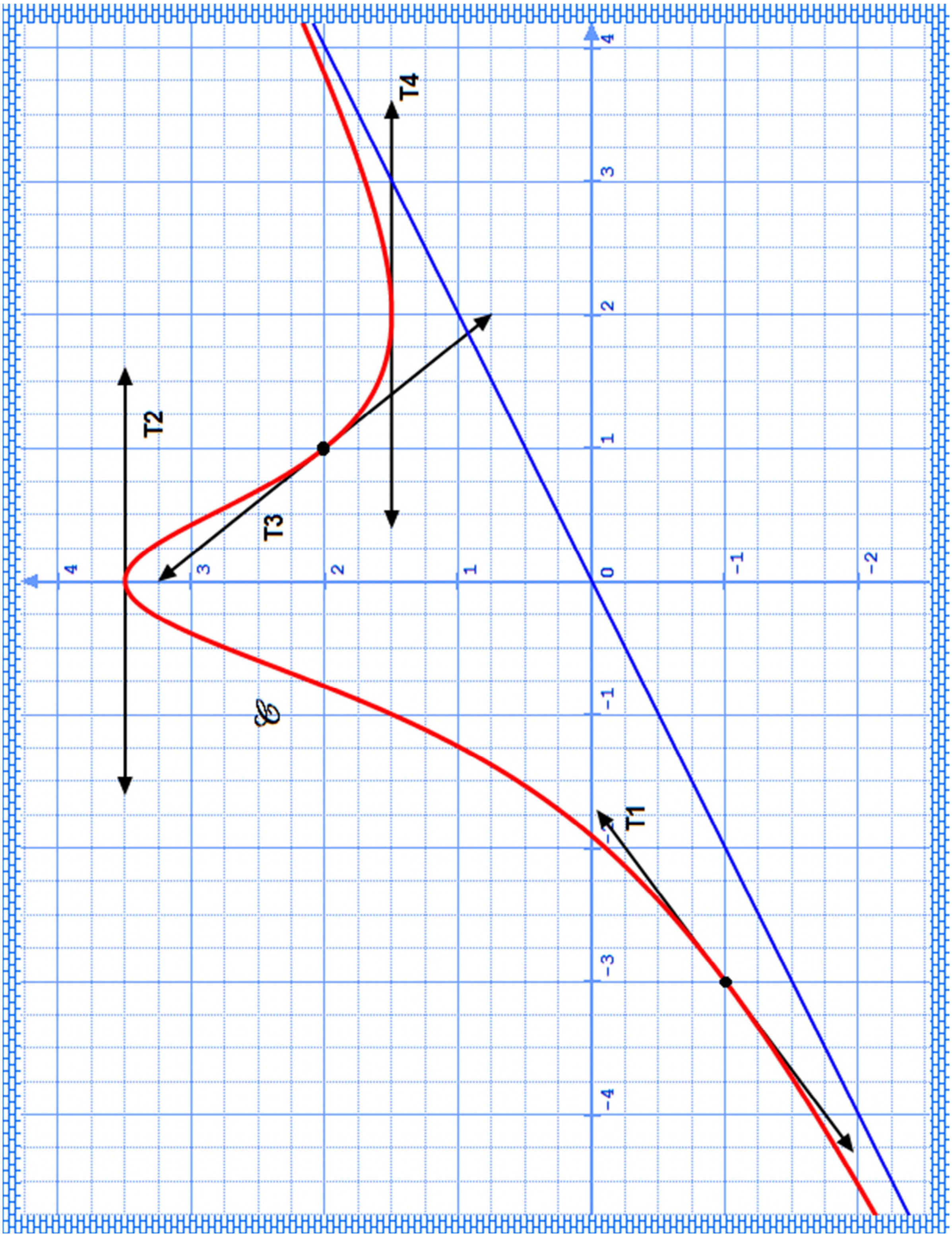
c) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $3x - 2y + z - 2 = 0$.

a) Montrer que les plans P et (ABC) sont perpendiculaires.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite D intersection des deux plans P et (ABC).

3) Déterminer à l'aide de deux méthodes différentes la distance du point A à la droite D.


T1
T2
T3
T4
𝒞

Correction du devoir de Synthèse n°2

Exercice 1

$\boxed{1)\ b)}$ La droite $D : y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ aux voisinages de $+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$

$\boxed{2)\ a)}$ La droite $D : y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ aux voisinages de $+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

$\boxed{3)\ b)}$ La droite $D : y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ aux voisinages de $+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 2f(x) - x = 0$

$\boxed{4)\ b)}$ $f'(-3) = 0,75$

$\boxed{5)\ a)}$ $f'(1) = -1,25$

$\boxed{6)\ a)}$ $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0,2]$ car f est décroissante sur cet intervalle

$\boxed{7)\ b)}$ $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt[3]{7}, +\infty\right[$ car $\mathscr{C}$ est au dessus de l'axe des abscisses sur cet intervalle et au dessus de cet axe sur $\left]-\infty, -\sqrt[3]{7}\right]$.

$\boxed{8)\ b)}$ La courbe $\mathscr{C}$ admet deux points d'inflexion

Exercice 2

1) a) La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable et strictement positive sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

Donc f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

$\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\ ,\ f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

b) $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert\ \infty$ $+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$

Donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) Soit $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ alors $-x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ et $f(-x) = \sqrt{(-x)^2-1} = f(x)$

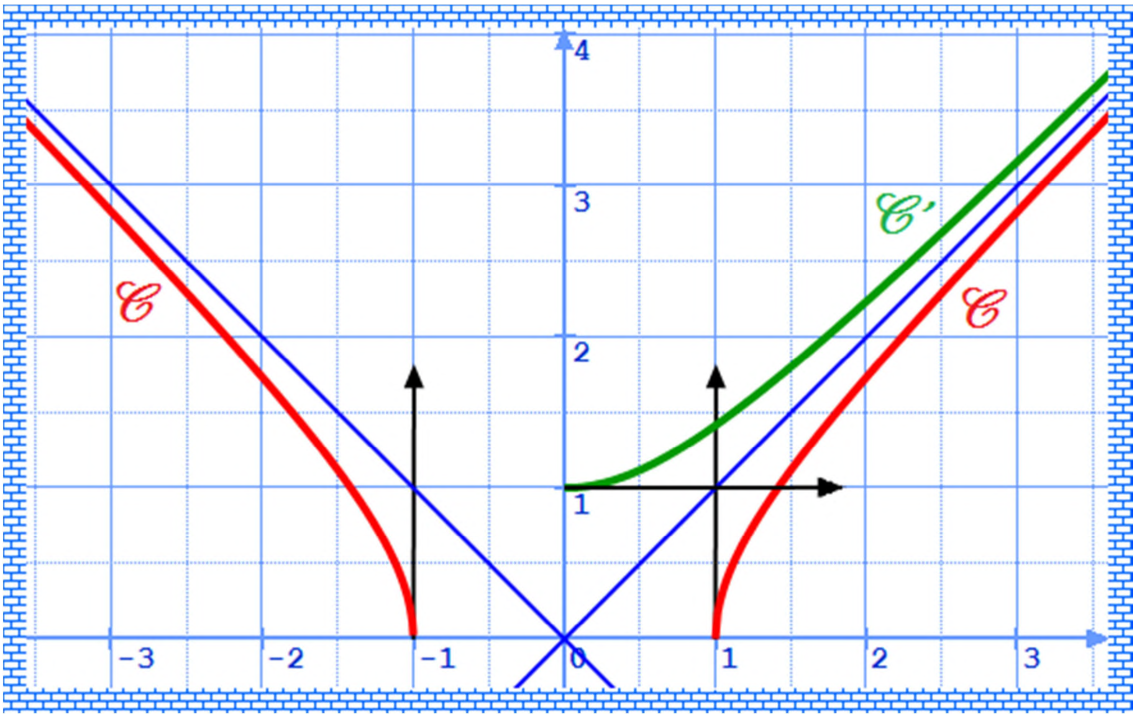
b) f est paire donc l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$

4) a) g est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[\Rightarrow g$ réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $g([1,+\infty[) = f([1,+\infty[) = [0,+\infty[$ donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[0,+\infty[$.

b) Soient $x \in [0,+\infty[$ et $y \in [1,+\infty[$ tels que $g^{-1}(x) = y$ ou encore $g(y) = x$

$g(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{y^2-1} = x \Leftrightarrow y^2 - 1 = x^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2+1} = g^{-1}(x)$.

c) La courbe $\mathscr{C}'$ est le symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Exercice 3

1) a) F est une primitive de f sur $]-2,2[$ donc F est dérivable sur $]-2,2[$ et $F' = f$

Donc G est dérivable sur $]-2,2[$ (Comme composée et somme de fonctions dérivables)

et $\forall x \in]-2,2[$, $G'(x) = -F'(-x) + F'(x) = -f(-x) + f(x) = -\frac{1}{\sqrt{4-(-x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = 0$.

b) $\forall x \in]-2,2[$, $G'(x) = 0 \Rightarrow$ Il existe une constante réelle k telle que

$G(x) = k$ pour tout $x \in]-2,2[$

$k = G(0) = 2F(0) = 0$ donc $\forall x \in]-2,2[$, $G(x) = 0$ ou encore $F(-x) = -F(x)$

Donc F est une fonction impaire.

2) $H(x) = F(2\cos x),\ x \in \left]0,\pi\right[$.

a) $\left|\begin{array}{l} La\ fonction\ u : x \mapsto 2\cos x\ est\ dérivable\ sur\ \left]0,\pi\right[\\ La\ fonction\ F\ est\ dérivable\ sur\ \left]-2,2\right[\\ \forall x \in \left]0,\pi\right[\ ;\ u(x) = 2\cos x \in \left]-2,2\right[\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} La\ fonction\ H = Fou\ est \\ dérivable\ sur\ \left]0,\pi\right[\end{array}\right.$

$$\forall x \in \left]0,\pi\right[,\ H'(x) = u'(x) \times F'(u(x)) = u'(x) \times f(u(x)) = -2\sin x \times \frac{1}{\sqrt{4 - 4\cos^2 x}}$$

$$= \frac{-2\sin x}{2\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-2\sin x}{2\left|\sin x\right|} = -1 \quad \left(car\ x \in \left]0,\pi\right[\Rightarrow \sin x > 0\right)$$

b) $\forall x \in \left]0,\pi\right[,\ H'(x) = -1 \Rightarrow$ Il existe une constante réelle k telle que $H(x) = -x + k$ pour tout $x \in \left]0,\pi\right[$.

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + k = F\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = F(0) = 0 \Rightarrow k = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\boxed{\forall x \in \left]0,\pi\right[,\ H(x) = -x + \frac{\pi}{2}}$

Exercice 4

1) a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0} \Rightarrow A, B$ et C ne sont pas alignés.

c) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Donc $(ABC) : -2x - 2y + 2z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$

$A(1,0,2) \in (ABC) \Rightarrow -2 \times 1 - 2 \times 0 + 2 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$ donc le plan (ABC) admet pour équation $-2x - 2y + 2z - 2 = 0$ ou encore $\boxed{x + y - z + 1 = 0}$.

2) a) $\vec{N}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) et $\overrightarrow{N'}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

$\vec{N} \cdot \overrightarrow{N'} = 1 \times 3 + 1 \times (-2) + (-1) \times 1 = 0$ donc $\vec{N} \perp \overrightarrow{N'}$

$\vec{N} \perp \overrightarrow{N'}$ donc les plans (ABC) et P sont perpendiculaires.

b) $M(x,y,z) \in (ABC) \cap P \Leftrightarrow x + y - z + 1 = 0$ et $3x - 2y + z - 2 = 0$

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 3x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda \in \mathbb{R} \\ x + y = -1 + \lambda \\ 3x - 2y = 2 - \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda \in \mathbb{R} \\ 2x + 2y = -2 + 2\lambda \\ 3x - 2y = 2 - \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}\lambda \\ y = -1 + \frac{4}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

3) *Les plans (ABC) et P sont perpendiculaires et se coupent suivant la droite D*
Donc le projeté orthogonal de A sur P est aussi le projeté orthogonal de A sur D
Alors $d(A,D) = d(A,P)$.

- *La droite D passe par le point* $E(0,-1,0)$ *et de vecteur directeur* $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$.

$$d(A,D) = \frac{\left\|\overrightarrow{AE} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$d(A,P) = \frac{\left|3 \times 1 - 2 \times 0 + 2 - 2\right|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$